Решим задачу теплопроводности, но уже на луче.
Это серьёзно всё усложняет. У нас появляется одна граничная точка – x=0.
Естественно, там возникают ГУ. Задача ставится так:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & [x>0] \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & \text{НУ} \\ \alpha u_x + \beta u|_{x=0} = \mu(t) & \text{ГУ} \end{cases}$$

По сравнению с задачей на прямой у нас теперь x неотрицателен, но зато добавились ГУ в нуле с функцией μ(t).

На прямой у нас была готовая формула

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi$$

А есть ли готовая формула для луча? Конечно. Только их три будет: для ГУ Дирихле, Неймана и 3-го рода.
Для ГУ 1 рода

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_1(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi +$$

$$+ a^2 \int_0^t \mu(\tau) \left.\frac{\partial G_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} d\tau$$

Какие отличия от случая прямой?

Во-первых, пределы изменились от –бесконечности до +бесконечности на от 0 до +бесконечности (что абсолютно логично, т.к. именно там происходит всё действие и только там определены функции f(,) и φ()).

Во-вторых, вместо G(,,) теперь G_1(,,), которая выражается через G(,,) как

$$G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)$$

Вспомнив, что

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Можем записать

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}},$$

В-третьих, появилось третье слагаемое в честь новой функции μ(t). Можно считать, что решение представляется в виде суммы трёх функций: первая пытается удовлетворить дифуру с f(,) при однородных ГУ и НУ, вторая и третья удовлетворяют дифуру без f(,), но вторая «отвечает» за ГУ, а третья за НУ. Если какие-то из f(x,t), φ(x) и μ(t) зануляются, то зануляются соответствующие интегралы.

В случае ГУ Неймана

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_2(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_2(x,\xi,t-\tau)\, d\xi - a^2 \int_0^t \nu(\tau) G_2(x,0,t-\tau)\, d\tau$$

Где

$$G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t)$$

То есть

$$G_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Ну а что будет в случае ГУ 3-го рода? Тут у меня есть формула только в случае μ(τ)=0, т.е. однородных ГУ:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_3(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_3(x,\xi,t-\tau)\, d\xi$$

Где

$$G_3(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi+z)}{4a^2 t} - hz}\, dz \right)$$

Конец методы ☺

Ну не совсем. Посмотрим, что будет (спойлер: сложно будет), если мы будем решать задачи без этих готовых формул.

Пример от Буткарёва:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = V_0 \leftarrow \text{неоднородное ГУ!} \end{cases}$$

Тут и f(x,t), и φ(x) тождественные нули, только μ(t) не тождественный нуль. Всего лишь ненулевая константа… но даже в этом случае решение задачи достаточно «увлекательное».

Вместо u(x,t) – функции двух переменных рассмотрим функцию v(λ,t) также двух переменных. По сути преобразование Фурье и разложение u(x,t) по синусам в каждый момент времени.

$$v(\lambda,t) \overset{def}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0 u(x,t) \sin \lambda x \, dx$$

И, соответственно,

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} v(\lambda,t) \sin \lambda x \, dx$$

Вообще преобразование Фурье требует интегрируемости квадрата функции от – бесконечности до бесконечности, но этим здесь уже никто не заморачивается.

И если мы её подставим, то у нас вместо дифура, где производные берутся по двум переменным, дифур, где производные берутся лишь по одной величине, а вторая выступает лишь в роли параметры. Это уже задача Коши, т.е. 4-й семестр. Ну хорошо, а что дальше? Подсчитаем производную v по t.

$$v_t(\lambda,t) \overset{def}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_t(x,t)\sin\lambda x\,dx$$

Выразим производную u по времени из дифура:

$$v_t(\lambda,t) = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{xx}(x,t)\sin\lambda x\,dx$$

И бьём по частям.

$$v_t(\lambda,t) = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\lambda x\,du_x(x,t) =$$

$$= a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\underbrace{\sin\lambda x\cdot u_x(x,t)\Big|_0^\infty}_{=0} - \lambda\int_0^\infty u_x(x,t)\cos\lambda x\,dx\right) =$$

Возможно, вам непонятно, почему подстановка оказалась ноль. В нуле она ноль, потому что синус ноль, а вот на бесконечности занулится уже u (и её производная), потому что необходимое требование раскладываемости всё по Фурье – угасать на бесконечности.

Продолжаем цепочку равенств:

$$= -a^2\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\lambda x\,du(x,t) = -a^2\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{\cos\lambda x\,u(x,t)\Big|_0^\infty}_{v_0} -$$

$$- a^2\lambda^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin\lambda x\,dx$$

Вторая подстановка на бесконечности вновь будет 0, а вот в нуле мы как раз используем ГУ Дирихле и делаем вывод, что это v_0. А второе слагаемое, если присмотреться - $v(\lambda,t)$, просто домноженную на $a^2\lambda^2$. Выходит, что

$$\begin{cases} v_t + a^2\lambda^2 v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^2\lambda v_0 \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Это задача Коши (в дифуре производная только по t, но нет по λ!)

Её решение $v(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^2\lambda v_0 \int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} =$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{v_0}{\lambda}\left(1 - e^{-a^2\lambda^2 t}\right)$

Но от нас хотят $u(x,t)$, а не $v(\lambda,t)$.

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v(\lambda,t)\sin\lambda x\, d\lambda = \frac{2}{\pi} v_0 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\, d\lambda}_{= \frac{\pi}{2}\text{, см. Бутузов, матан-3}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} v_0 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda} e^{-a^2\lambda^2 t}\, d\lambda}_{\frac{\pi}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),\ \Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\alpha e^{-\xi^2} d\xi}$$

90% времени, который Буткарёв потратил на решение этой задачи на семинаре, ушло на счёт двух интегралов в конце. Первый вычислял Валентин Фёдорович Бутузов http://math.phys.msu.ru/data/364/Butuzov_3_(1).pdf , страница 135. Второй выражается через функцию ошибок Ф(), который через элементарные функции не выражается.

А вот вам ещё пример с неоднородными ГУ, на этот раз с ГУ Неймана:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = q \end{cases}$$

Ну что, снова определяем

$$v(\lambda,t) \overset{def}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0 u(x,t) \sin \lambda x \, dx$$

? А вот и нет. Почему с ГУ Дирихле у мы раскладывали по синусам исходную функцию – потому что синусы в нуле. А тут Нейман, надо, значит, раскладывать по косинусам, потому что именно у косинусов производная в нуле ноль.

Аналогичным образом, как и с ГУ Дирихле, два раза берём по частям

$$V_t = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_{xx} \cos \lambda x \, dx$$

$$V_t = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Big(\underbrace{u_x \cos \lambda x \Big|_0^\infty}_{-q} + \lambda \int u_x \sin \lambda x \, dx \Big)$$

$$V_t = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty \Big(-q + \lambda u \sin \lambda x \Big|_0^\infty - \lambda^2 \int_0^\infty u \cos \lambda x \, dx \Big)$$

$$\begin{cases} V_t + a^2 \lambda^2 V = -a^2 q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ V\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Как и в прошлом случае, получаем задачу Коши, которую легко решаем

$$V(\lambda,t) = -a^2 q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau$$

И далее нас ждёт увлекательное обратное преобразование Фурье со взятием увлекательных интегралов. Тут у Буткарёва закончилось на семинаре время. Но, думаю, ещё час бы это заняло. Не берите интегралы ☺